Deretan, Rekursi, dan Relasi Rekurens

(Update 2024)

Bagian 1

Bahan Kuliah IF1220 Matematika Diskrit

Oleh: Rinaldi Munir

Program Studi Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika (STEI)
ITB

Deretan (*sequence*)

- Deretan (*sequences*) atau barisan (*series*) adalah daftar terurut (*ordered list*) elemen-elemen diskrit.

- Definisi: Sebuah **deretan** adalah fungsi dari subset suatu himpunan bilangan bulat (biasanya **N** atau **P**) ke sebuah himpunan S.

N = {1, 2, 3, 4, … }

S misalnya {2, 4, 6, 8, …}, {1/3, 1/5, 1/7, …}, dsb

- Notasi deretan: $\{a_n\}$

- Deretan umumnya dinyatakan dalam suatu formula, misalnya:

$a_n = 2n$

$a_n = 1/n$

$a_n = 7 – 3n$

Contoh 1: Tinjau sebuah deretan $\{a_n\}$, dalam hal ini $a_n = 2n$, $n = 1, 2, …$, maka elemen-elemen di dalam deretan adalah

$a_1, a_2, a_3, a_4, …$

yaitu

2, 4, 6, 8, …

- Contoh-contoh deretan dan formulanya:

1, 3, 5, 7, …	$a_n = 2n - 1$
-1, 1, -1, 1, …	$a_n = (-1)^n$
1, -1, 1, -1, …	$a_n = (-1)^{n+1}$
3, 9, 27, 81, …	$a_n = 3^n$
1, 1/2, 1/4, 1/8, …	$a_n = (1/2)^{n-1}$
10, 50, 250, 1250, …	$a_n = 2 \cdot 5^n$
0, 3, 8, 15, …	$a_n = n^2 - 1$
-1, 3, 7, 11, …	$a_n = -1 + 4n$
dsb	

- **String** adalah deretan berhingga karakter berbentuk

$$a_1a_2a_3a_4\ldots a_n$$

  Panjang string S adalah jumlah karakter di dalam string tersebut

  Contoh: *informatika* adalah string dengan panjang 11 karakter
  10100101 adalah string biner dengan panjang 8 bit

- String kosong dilambangkan dengan λ, panjangnya = 0

Penjumlahan deretan

Jumlah deretan

$$a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots, a_n$$

adalah

$$a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_n$$

atau dalam notasi sumasi:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k$$

k adalah indeks summasi,

m adalah batas bawah indeks,

n adalah batas atas indeks

Contoh 2: Berapa nilai $\sum_{k=1}^{5} k^2$?

Jawaban:

$$\sum_{k=1}^{5} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55$$

Contoh 3: Batas bawah sumasi kadangkala perlu digeser agar dapat dijumlahkan dengan sumasi lain yang memiliki batas bawah berbeda. Pada contoh 2 di atas batas bawah digeser dari 1 menjadi 0, akibatnya:

$$\sum_{k=1}^{5} k^2 = \sum_{k=0}^{4} (k+1)^2$$

Contoh 4: Sumasi dapat dipecah dengan membagi dua indeksnya, misalnya

$$\sum_{k=1}^{100} k^2 = \sum_{k=1}^{49} k^2 + \sum_{k=50}^{100} k^2$$

- Beberapa sumasi sudah ditemukan rumus penjumlahannya sebagai berikut:

TABLE 2 Some Useful Summation Formulae.

Sum	*Closed Form*	
$\sum_{k=0}^{n} ar^k \ (r \neq 0)$	$\frac{ar^{n+1} - a}{r - 1}, r \neq 1$	(deret geometri)
$\sum_{k=1}^{n} k$	$\frac{n(n+1)}{2}$	(deret aritmetika)
$\sum_{k=1}^{n} k^2$	$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$	
$\sum_{k=1}^{n} k^3$	$\frac{n^2(n+1)^2}{4}$	
$\sum_{k=0}^{\infty} x^k, \lvert x \rvert < 1$	$\frac{1}{1-x}$	
$\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1}, \lvert x \rvert < 1$	$\frac{1}{(1-x)^2}$	

Contoh 5: Hitung nilai $\sum_{k=50}^{100} k^2$

Jawaban:

$$\sum_{k=1}^{100} k^2 = \sum_{k=1}^{49} k^2 + \sum_{k=50}^{100} k^2$$

$$\sum_{k=50}^{100} k^2 = \sum_{k=1}^{100} k^2 - \sum_{k=1}^{49} k^2$$

Gunakan rumus $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$:

$$\sum_{k=50}^{100} k^2 = \frac{(100)(101)(201)}{6} - \frac{(49)(50)(99)}{6} = 338.350 - 40.425 = 297.925$$

Sumasi ganda

- Di dalam algoritma, kita perlu menghitung berapa kali suatu operasi tertentu dilakukan di dalam sebuah kalang bersarang (*nested loop*). Penjumlahan semua operasi di dalam kalang bersarang dinyatakan dalam bentuk sumasi ganda.

Contoh: $\sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{3} ij$

Untuk menghitung sumasi ganda, mula-mula ekspansi sumasi terdalam, lalu dilanjukan dengan sumasi terluar:

$$\sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{3} ij = \sum_{i=1}^{4}(i + 2i + 3i) = \sum_{i=1}^{4} 6i = 6 + 12 + 18 + 24 = 60$$

Contoh penggunaan: Berapa kali operasi + dilakukan di dalam algoritma di bawah ini?

x = 0
for *j* = 1 **to** 10 **do**
  for *k* = 1 **to** *j* **do**
    x = *x* + 2
  end for
end for

Penyelesaian:
Operasi + terdapat di dalam pernyataan x = x + 2
Operasi ini dilakukan satu kali pada setiap pengulangan
Jumlah seluruh operasi + adalah:

$$t = \sum_{j=1}^{10} \sum_{k=1}^{j} 1$$

$$= \sum_{j=1}^{10} (1 + 1 + \ \ldots + 1 \ sebanyak\ j\ kali)$$

$$= \sum_{j=1}^{10} j$$

$$= \frac{10(10+1)}{2} = 55$$

Latihan:

1. Tentukan nilai $\sum_{k=1}^{8} 2^k + \sum_{k=2}^{8}(-3)^k$

2. Tentukan nilai $\sum_{i=0}^{2} \sum_{j=0}^{3}(2i + 3j)$

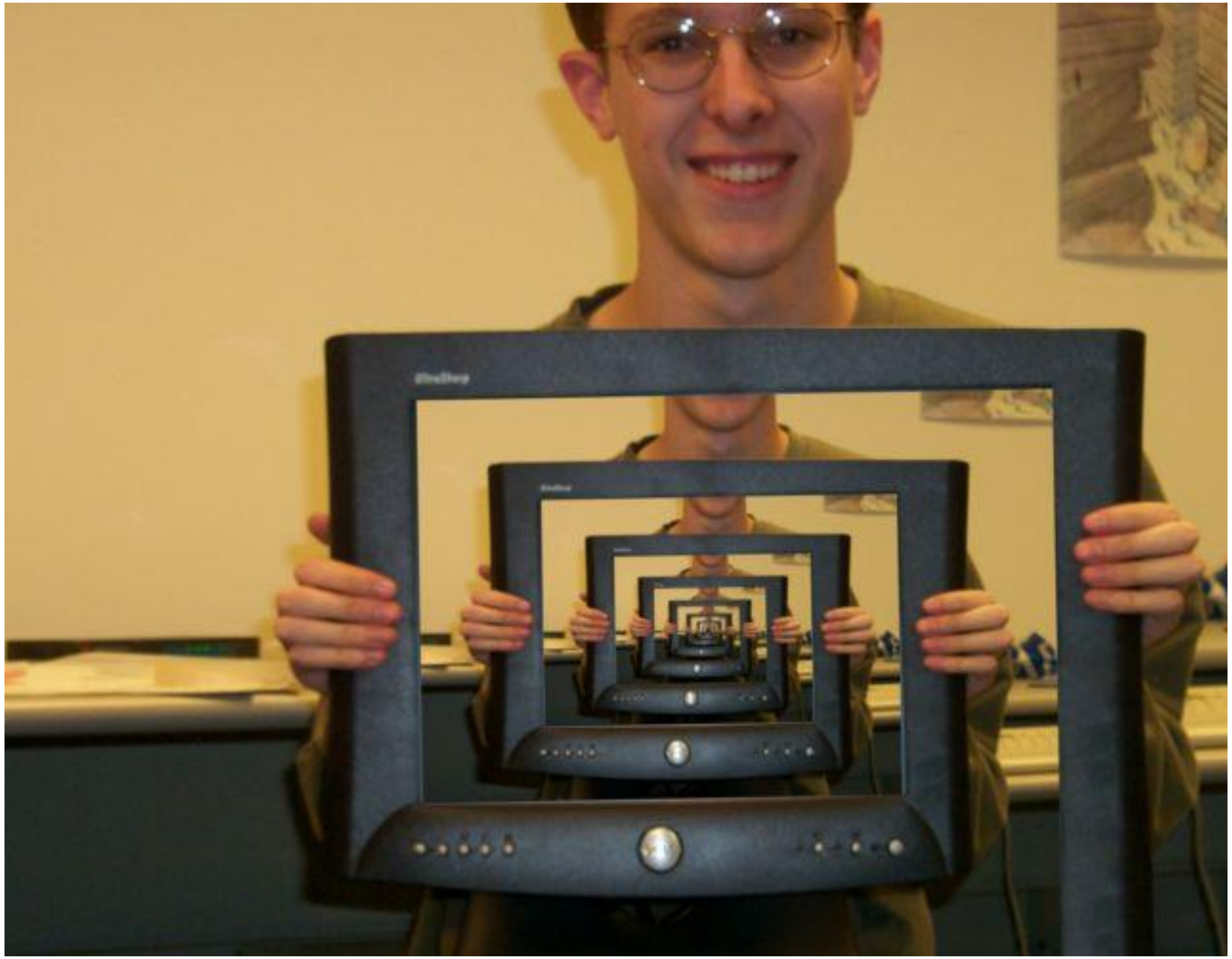
3. Tentukan nilai $\sum_{i=0}^{3} \sum_{j=0}^{2} i$

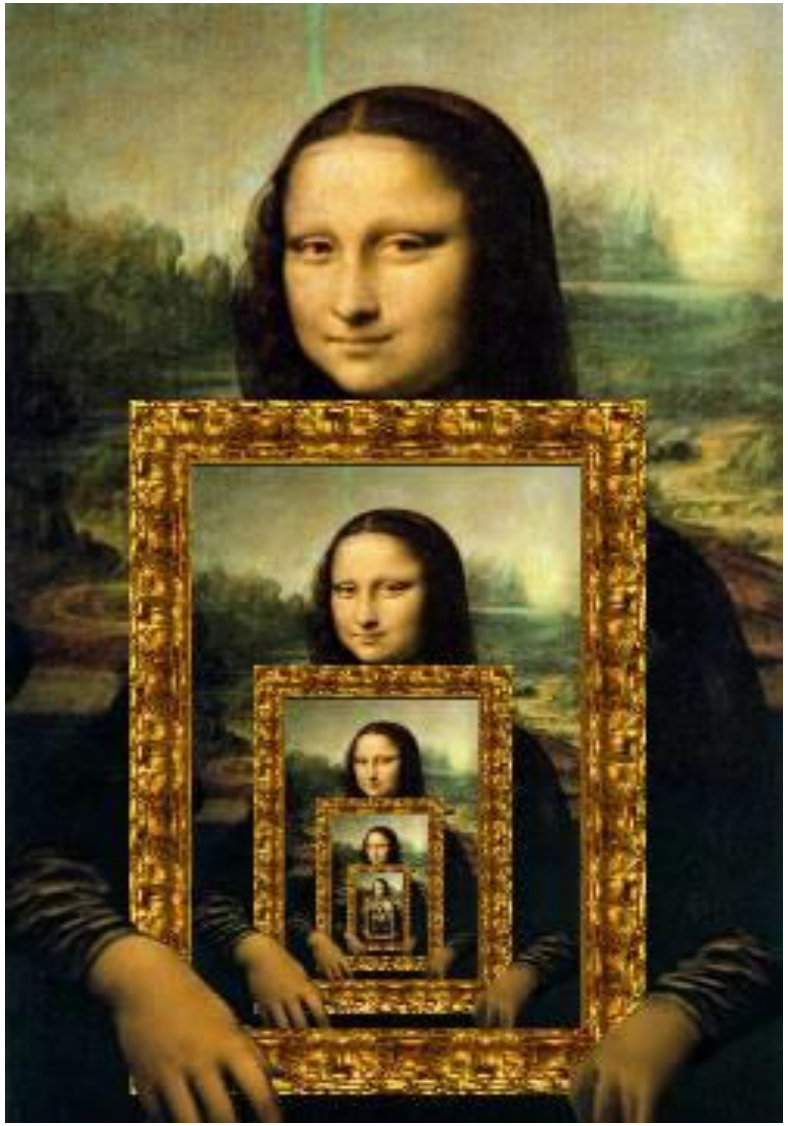
Rekursi

- Sebuah objek dikatakan **rekursif** (*recursive*) jika ia didefinisikan dalam terminologi dirinya sendiri.

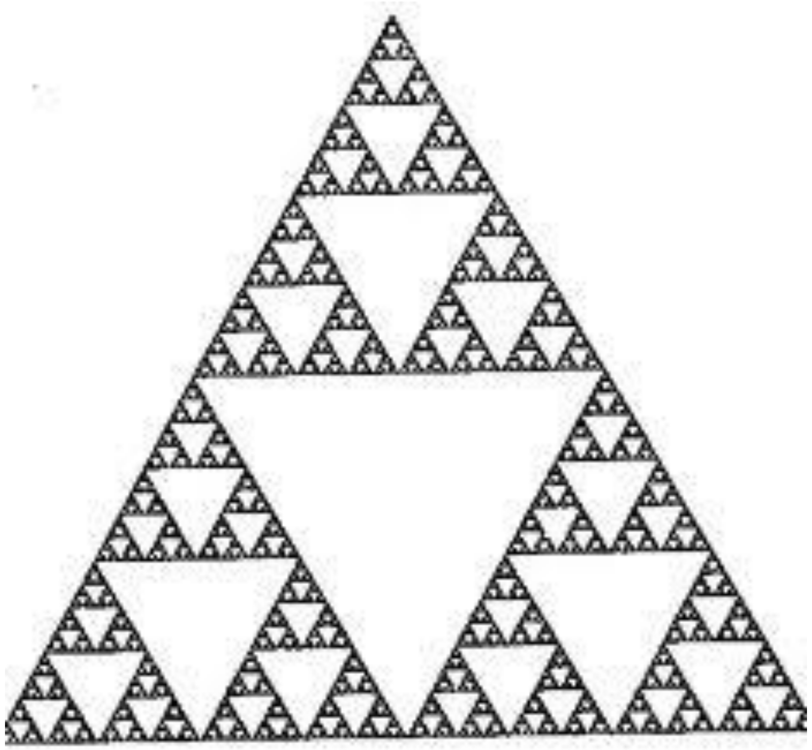
- Proses mendefinisikan objek dalam terminologi dirinya sendiri disebut **rekursi** (*recursion*).

- Perhatikan tiga buah gambar pada tiga *slide* berikut ini.





- Objek fraktal adalah contoh bentuk rekursif.



Fraktal di alam

Fungsi Rekursif

- Fungsi rekursif didefinisikan oleh dua bagian:

(i) *Basis*

- Bagian yang berisi nilai fungsi yang terdefinisi secara eksplisit.
- Bagian ini juga sekaligus menghentikan rekursif (dan memberikan sebuah nilai yang terdefinisi pada fungsi rekursif).

(ii) *Rekurens*

- Bagian ini mendefinisikan fungsi dalam terminologi dirinya sendiri.
- Berisi kaidah untuk menemukan nilai fungsi pada suatu input dari nilai-nilai lainnya pada input yang lebih kecil.

Contoh 6: Misalkan *f* didefinsikan secara rekusif sbb

$$f(n) = \begin{cases} 3 & , n = 0 \\ 2f(n-1) + 4 & , n > 0 \end{cases}$$

basis

rekurens

Tentukan nilai f(4)!

Solusi: f(4) = 2f(3) + 4

= 2(2f(2) + 4) + 4

= 2(2(2f(1) + 4) + 4) + 4

= 2(2(2(2f(0) + 4) + 4) + 4) + 4

= 2(2(2(2·3 + 4) + 4) + 4) + 4

= 2(2(2(10) + 4) + 4) + 4

= 2(2(24) + 4) + 4

= 2(52) + 4

= 108

Cara lain menghitungnya:

$f(0) = 3$

$f(1) = 2f(0) + 4 = 2 \cdot 3 + 4 = 10$

$f(2) = 2f(1) + 4 = 2 \cdot 10 + 4 = 24$

$f(3) = 2f(2) + 4 = 2 \cdot 24 + 4 = 52$

$f(4) = 2f(3) + 4 = 2 \cdot 52 + 4 = 108$

Jadi, $f(3) = 108$.

Contoh 7: Nyatakan *n*! dalam definisi rekursif

Solusi: $$n! = \underbrace{1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times (n-1)}_{(n-1)!} \times n = (n-1)! \times n$$

Misalkan f(n) = n!, maka

$$n! = \begin{cases} 1 & , n = 0 \\ n \cdot (n-1)! & , n > 0 \end{cases}$$

Menghitung 5! secara rekursif adalah:

5! = 5 · 4! = 5 · 4 · 3! = 5 · 4 · 3 · 2!

= 5 · 4 · 3 · 2 · 1! = 5 · 4 · 3 · 2 · 1 · 0! = 5 · 4 · 3 · 2 · 1 · 1 = 120

Algoritma menghitung faktorial:

```
function Faktorial (input  n :integer)→integer
{ mengembalikan nilai n!;
  basis   : jika n = 0, maka 0! = 1
  rekurens: jika n > 0, maka n! = n × (n-1)!
}
DEKLARASI
      -
ALGORITMA:
   if n = 0 then
     return 1                                   { basis }
   else
     return  n * Faktorial(n – 1)         { rekurens }
   end
```

- **Contoh 8**: Barisan Fibonacci 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 11, 19, …. Dapat dinyatakan secara rekursif sebagai berikut:

$$f_n = \begin{cases} 0 & , n = 0 \\ 1 & , n = 1 \\ f_{n-1} + f_{n-2} & , n > 1 \end{cases}$$

- **Contoh 9**: Fungsi (polinom) Chebyshev dinyatakan sebagai

$$T(n, x) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ x, & n = 1 \\ 2x \cdot T(n-1, x) - T(n-2, x), & n > 1 \end{cases}$$

- **Contoh 10**: Sumasi $\sum_{k=0}^{n} a_k$ didefinisikan secara rekursif sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} a_k &= a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n \\ &= (a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}) + a_n \\ &= (\sum_{k=0}^{n-1} a_k) + a_n\end{aligned}$$

sehingga

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \begin{cases} a_0 & , n = 0 \\ (\sum_{k=0}^{n-1} a_k) + a_n & , n > 0 \end{cases}$$

Latihan

1. Definisikan a^n secara rekursif , yang dalam hal ini a adalah bilangan riil tidak-nol dan *n* adalah bilangan bulat tidak-negatif.

2. Nyatakan $a \times b$ secara rekursif, yang dalam hal ini *a* dan *b* adalah bilangan bulat positif.

(Solusinya ada setelah slide berikut!)

- Solusi:

1. $$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots a}_{n\,\text{kali}} = a \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots a}_{n-1\,\text{kali}} = a \cdot a^{n-1}$$

   sehingga:

   $$a^n = \begin{cases} 1 & , n = 0 \\ a \cdot a^{n-1} & , n > 0 \end{cases}$$

2. $$\begin{aligned} a \cdot b &= \underbrace{b + b + b + \ldots + b}_{a\ \text{kali}} \\ &= b + \underbrace{b + b + \ldots + b}_{a-1\,\text{kali}} \\ &= b + (a-1)b \end{aligned}$$

   $$\Rightarrow \quad a \cdot b = \begin{cases} b & , a = 1 \\ b + (a-1)b & , a > 1 \end{cases}$$

Himpunan Rekursif

- Ingatlah kembali string adalah deretan berhingga karakter

  Contoh:

  itb disusun oleh karakter i, t,dan b

  informatika disusun oleh karakter i, n, f, o, r, m, a, t, i, k, a

- String kosong (*null string*) atau '' adalah string dengan panjang nol . Notasi: λ

- Alfabet adalah himpunan karakter yang elemen-elemennya adalah penyusun string. Notasi: $\sum$

  Contoh: $\sum$ = {0, 1}, $\sum$ = {a, b, c, …, z}

- Misalkan Σ^* adalah himpunan string yang dibentuk dari alfabet Σ, maka Σ^* dapat didefinisikan secara rekursif sebagai berikut:

  (i) Basis: $\lambda \in \Sigma^*$

  (ii) Rekurens: Jika $w \in \Sigma^*$ dan $x \in \Sigma$, maka $wx \in \Sigma^*$

- **Contoh 11**: Misalkan $\Sigma = \{0, 1\}$, maka elemen-elemen Σ^* dibentuk sebagai berikut:

  (i) λ (basis)

  (ii) $0 + \lambda = 0$, $1 + \lambda = 1$

  $0 + 1 = 01$, $0 + 0 = 00$, $1 + 0 = 10$, $0 + 0 = 00$, $1 + 1 = 11$

  $00 + 1 = 001$,

  010, 110, 1110, 110001, ….dst

- Sebuah *string* dibentuk dari penyambungan (*concatenation*) sebuah string dengan string lain (notasi *concatenation* adalah $\cdot$)

  Contoh: $a \cdot b = ab$

  $w \cdot xyz = wxyz$

  $itb \cdot 3 = itb3$

- Penggabungan dua buah string dapat didefinisikan secara rekursif sebagai berikut:

  (i) Basis: Jika $w \in \Sigma^*$, maka $w \cdot \lambda = w$, yang dalam hal ini λ adalah string kosong

  (ii) Rekurens: Jika $w_1 \in \Sigma^*$ dan $w_2 \in \Sigma^*$ dan $x \in \Sigma$, maka

  $w_1 \cdot w_2 \cdot x = (w_1 \cdot w_2) \cdot x$

- Panjang sebuah string adalah banyaknya karakter di dalam string tersebut.

  Contoh:

  itb panjangnya 3

  informatika panjangnya 11

  λ (string kosong) panjangnya 0

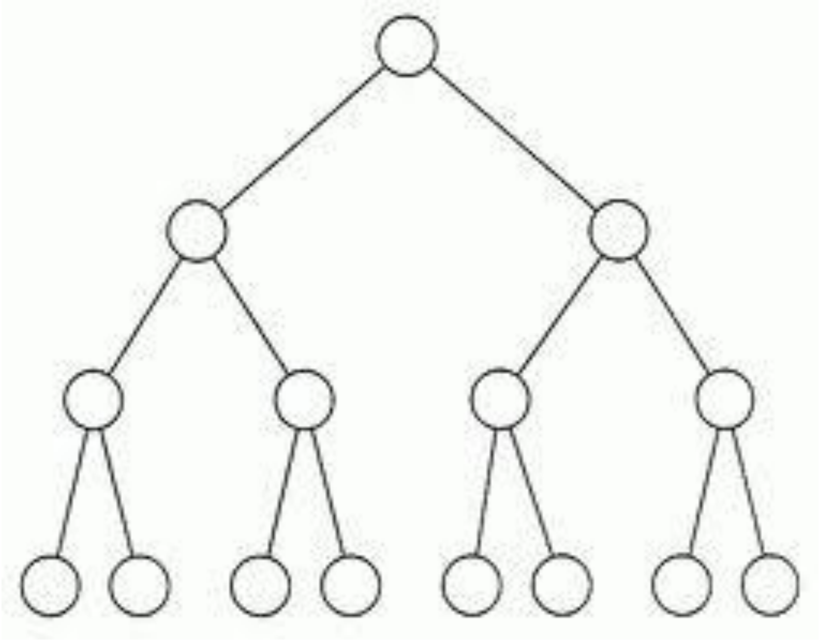
- Panjang string (disimbolkan dengan L) dapat didefinisikan secara rekursif:

  (i) Basis: $L(\lambda) = 0$

  (ii) Rekurens: $L(wx) = L(w) + 1$ jika $w \in \Sigma^*$ dan $x \in \Sigma$

Struktur Rekursif

- Struktur data yang penting dalam komputer adalah pohon biner (*binary tree*).



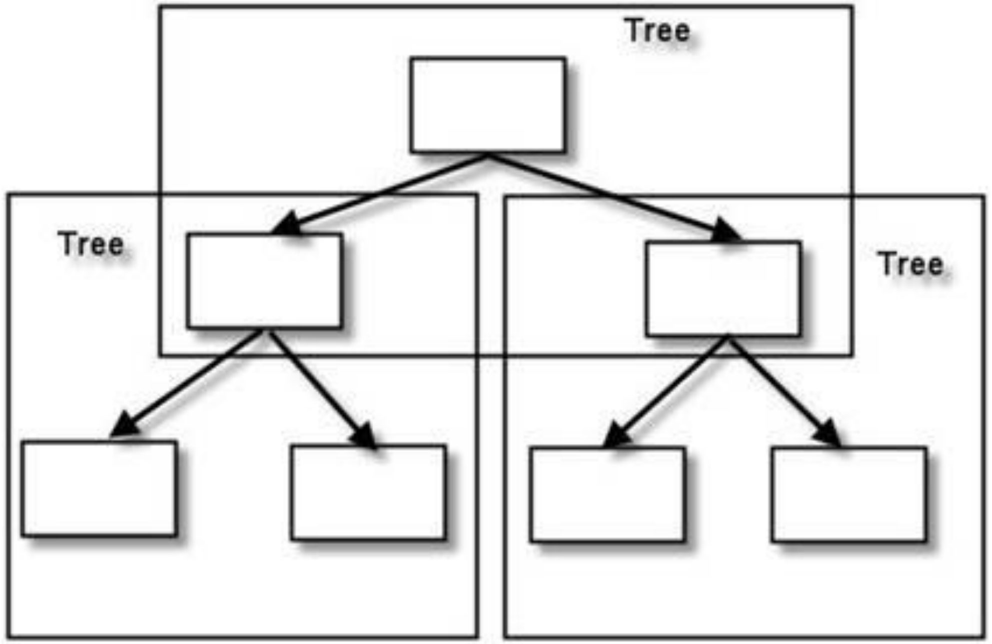
- Simpul (*node*) pada pohon biner mempunyai paling banyak dua buah anak.

- Jumlah anak pada setiap simpul bisa 1, 2, atau 0.

- Simpul yang mempunyai anak disebut simpul cabang (*branch node*) atau simpul dalam (*internal node*)

- Simpul yang tidak mempunyai anak disebut simpul daun (*leave*).

- Pohon biner adalah struktur yang rekursif, sebab setiap simpul mempunyai cabang yang juga berupa pohon. Setiap cabang disebut upapohon (*subtree*).

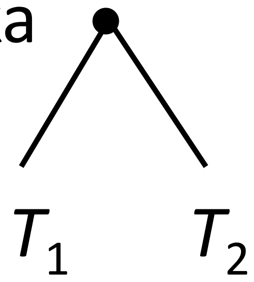


Binary tree consisting of 3 binary trees

- Oleh karena itu, pohon dapat didefinisikan secara rekursif sebagari berikut:

  (i) Basis: kosong adalah pohon biner

  (ii) Rekurens: Jika T_1 dan T_2 adalah pohon biner, maka

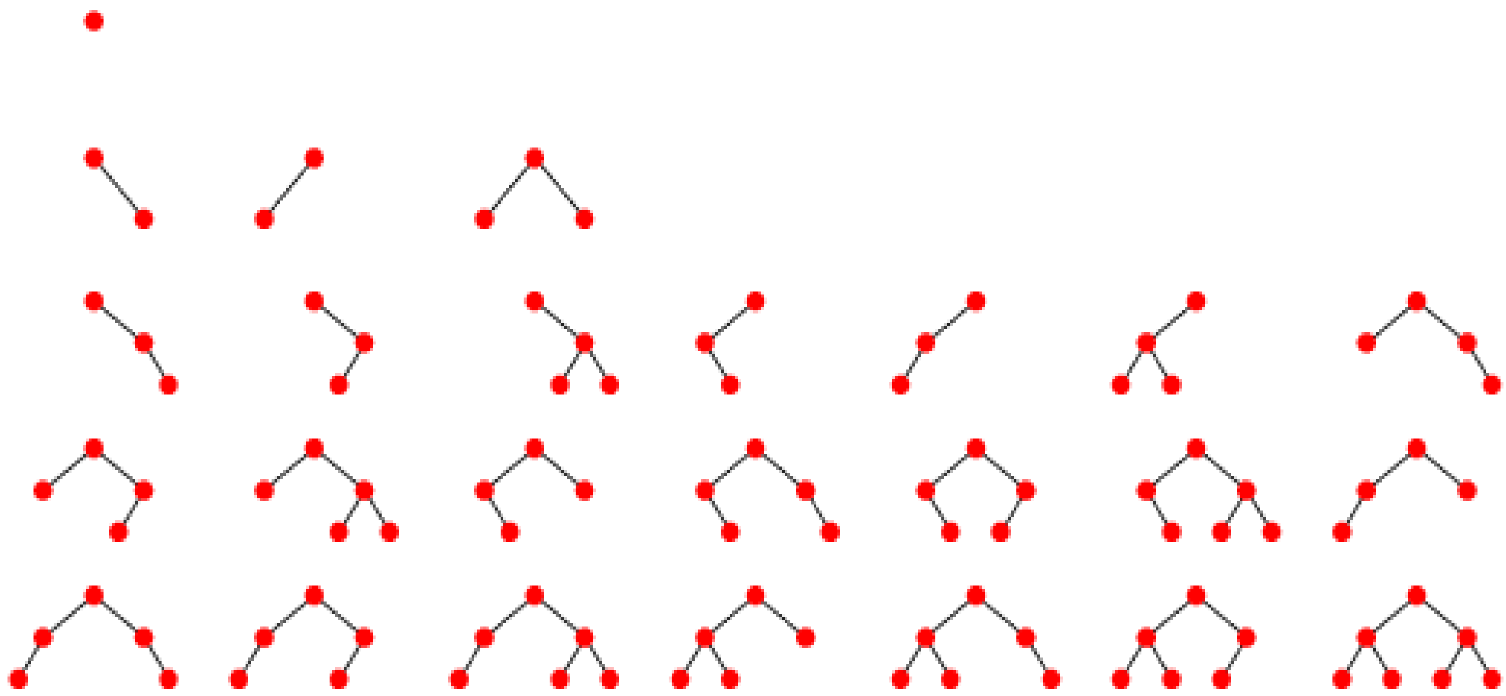
  

  adalah pohon biner

Proses pembentukan pohon biner secara rekursif:

(i) ϕ

(ii)



Deretan Rekursif

- Perhatikan deretan bilangan berikut ini:

  1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, …

  Setiap elemen ke-n untuk n = 0, 1, 2, … merupakan hasil perpangkatan 2 dengan n, atau $a_n = 2^n$.

  Secara rekursif, setiap elemen ke-n merupakan hasil kali elemen sebelumnya dengan 2, atau $a_n = 2a_{n-1}$.

  Basis: $a_0 = 1$

  Rekurens: $a_n = 2a_{n-1}$, $n \geq 1$

- Deretan Fibonacci adalah sebagai berikut:

  0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, …

  yaitu setiap elemen ke-n adalah jumlah dari dua elemen sebelumnya ($F_{n-1} + F_{n-2}$)

Bentuk umum deretan Fibonacci dalam bentuk rekursif adalah:

Basis: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$

Rekurens: $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $n \geq 2$

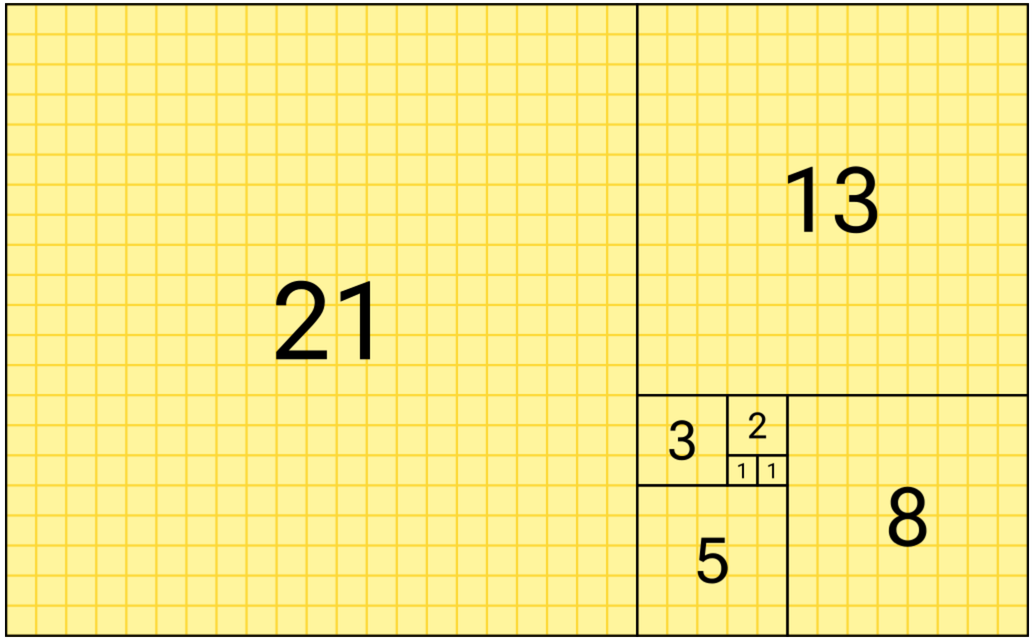
Berapakah F_5?

$F_2 = F_1 + F_0 = 0 + 1 = 1$

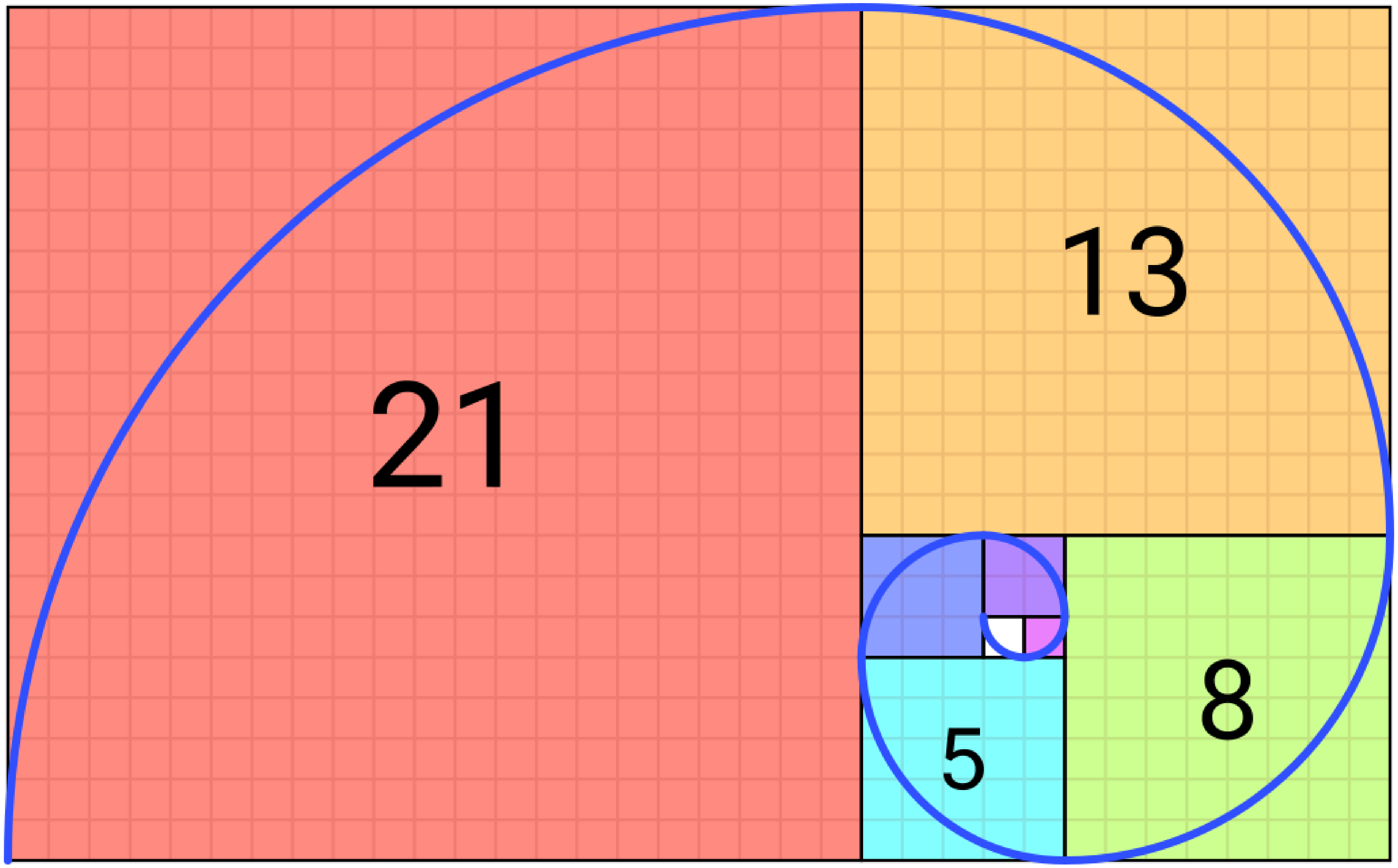
$F_3 = F_2 + F_1 = 1 + 1 = 2$

$F_4 = F_3 + F_2 = 2 + 1 = 3$

$F_5 = F_4 + F_3 = 3 + 2 = 5$



Pengubinan berbentuk persegi, panjang setiap sisi persegi adalah barisan Fibonacci 1, 1, 2, 3, 5, 8,13, 21



Spiral Fibonacci: perkiraan spiral emas yang dibuat dengan menggambar busur melingkar yang menghubungkan sudut-sudut persegi yang berlawanan pada ubin Fibonacci (Sumber: Wikipedia)

- **Contoh 12**: Koloni bakteri dimulai dari lima buah bakteri. Setiap bakteri membelah diri menjadi dua bakteri baru setiap satu jam. Berapa jumlah bakteri baru sesudah *4* jam?

  Misalkan a_n = jumlah bakteri setelah *n* jam, yang dapat dinyatakan dalam relasi rekursif sebagai berikut:

$$a_n = \begin{cases} 5 & , n = 0 \\ 2a_{n-1} & , n > 0 \end{cases}$$

n = 1 → jumlah bakteri = $a_1 = 2a_0 = 2 \cdot 5 = 10$

n = 2 → jumlah bakteri = $a_2 = 2a_1 = 2 \cdot 10 = 20$

n = 3 → jumlah bakteri = $a_3 = 2a_2 = 2 \cdot 20 = 40$

n = 4 → jumlah bakteri = $a_4 = 2a_3 = 2 \cdot 40 = 80$

Jadi, setelah 4 jam terdapat 80 buah bakteri

Bersambung ke Bagian 2